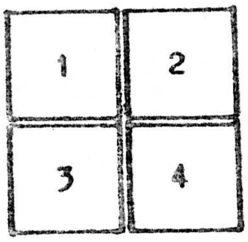
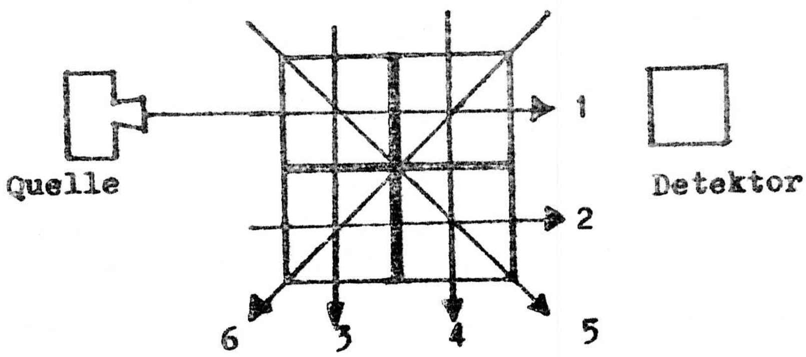
Numerische Auflösung von linearen Gleichungssystemen in der Computer-Tomographie

J. Hejtmanek, Wien

1. Zunächst wollen wir ein einfaches Modell besprechen: Wir wollen uns vorstellen, daß vier Glaswürfel mit verschieden starkem Absorptionsvermögen für Licht in einem quadratischen Gitter angeordnet sind:



Wir numerieren diese Glaswürfel von 1 bis $2^2=4$ durch. Weiters wollen wir uns vorstellen, daß wir mit Hilfe einer Lichtquelle, eines Kollimators und einer Photozelle die Absorption jeweils zweier Glaswürfel hintereinander messen können. Dazu wählen wir die folgenden Geraden und numerieren sie von 1 bis 6 durch.



Es sei x_i die zu bestimmende Absorption für Licht in der Zelle $i = 1,2,3,4$, und es sei p_n die gemessene Gesamtabsorption entlang des Strahles $k=1,2,3,4,5,6$.

Wir fragen uns nach der Lösbarkeit des Problems, ob wir durch Messungen und anschließende Rechnung die Dichtefunktion des Systems, d.h. $(x_i : i=1,2,3,4)$ bestimmen können. Die Werte x_i und p_k hängen durch ein lineares Gleichungssystem zusammen:

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2 \qquad\qquad &= p_1\\
x_3+x_4 &= p_2\\
x_1+\quad x_3 \qquad &= p_3\\
x_2 \quad +x_4 &= p_4\\
\sqrt{2}x_1 \quad +\sqrt{2}x_4 &= p_5\\
\sqrt{2}x_2+\sqrt{2}x_3 \qquad &= p_6
\end{aligned}
$$

Dieses Gleichungssystem kann man in Matrixform $\Omega X=P$ schreiben, wobei Ω eine 6x4, X eine 4x1 und P eine 1x6 Matrix ist:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{bmatrix} \text{ und } P = \begin{bmatrix} p_1\\ p_2\\ p_3\\ p_4\\ p_5\\ p_6 \end{bmatrix}$$

Die Matrix Ω stellt dann eine lineare Abbildung: $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \text{im}\,\Omega \subseteq \mathbb{R}^6$, wobei der Bildraum der Matrix Ω, im Ω, ein 4-dimensionaler linearer Unterraum von $\mathbb{R}^6$ ist, wenn der Rang die Matrix Ω vier ist. Das Gleichungssystem $\Omega X = P$ hat genau eine Lösung, wenn $P \in \text{im}\,\Omega$ ist, d.h. wenn P ein möglicher Meßvektor ist.

Zunächst sehen wir, daß es nicht möglich ist, das Problem zu lösen, wenn man 4 beliebige Strahlen aus den 6 möglichen herausgreift. So kann man aus Messungen entlang der Strahlen $k=1,2,3,4$ nicht die Dichtefunktion x_i bestimmen. Dies zeigt ein Gegenbeispiel: Die Dichtefunktionen (x_1, x_2, x_3, x_4) und $(x_1+1, x_2-1, x_3-1, x_4+1)$ liefern dasselbe Meßergebnis (p_1, p_2, p_3, p_4). Es ist aber möglich, das Problem zu lösen, wenn man die vier Strahlen $k=1,2,4,6$ wählt. Dann kann man die Dichtefunktion eindeutig bestimmen, weil die entsprechende Untermatrix von Ω den Rang 4 hat:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad\quad &= p_1 \\ x_2 \quad + x_4 &= p_4 \\ x_3 + x_4 &= p_2 \\ x_2 + x_3 \quad\quad &= p_6/\sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

2. Die Auflösung des Gleichungssystems mit Methoden der linearen Algebra bietet keine Schwierigkeiten, da in unserem Modell die Anzahl der Zellen mit vier sehr klein ist. Wenn aber, wie dies in der Computer-Tomographie der Fall ist, die Anzahl der Zellen 10.000 oder sogar 100.000 ist, dann kommt für die numerische Auflösung des Gleichungssystems nur ein Iterationsverfahren in Frage. Im folgenden soll ein solches besprochen werden. Man hat es also mit einem linearen Gleichungssystem $\Omega X = P$ zu tun, wobei Ω eine $m \times n$, X eine $n \times 1$ und P eine $m \times 1$ Matrix ist. Es soll $m \geq n$ sein. In der Computer-Tomographie ist $n = 100^2 = 10.000$ bis $n = 300^2 = 90.000$. Die Matrix Ω habe den Rang n. Dann hat $\Omega X = P$ genau eine Lösung, wenn $P \in \operatorname{im} \Omega$ ist. Physikalisch bedeutet dies, daß P ein mögliches Ergebnis einer Messung ist. Die Matrix Ω ist positiv, d.h. die Matrixelemente von Ω sind nichtnegativ. In jeder Zeile von Ω sind nur sehr wenige Matrixelemente von Null verschieden, etwa $\sqrt{n}$ von n; in dem anfangs beschriebenen Modell sind es 2 von 4.

Wir werden jetzt einen Iterations-Algorithmus zur näherungsweisen Lösung eines solchen Gleichungssystems anhand eines einfachen Beispiels beschreiben. Es seien $m = 3$ und $n = 2$. Wir schreiben Ω in der Form

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix},$$

wobei Ω_i, i=1,2,3, die Zeilen von Ω bedeuten. Dann kann man die Matrixgleichung in der Form dreier Gleichungen schreiben:

$$\langle \Omega_1, X \rangle = p_1$$
$$\langle \Omega_2, X \rangle = p_2$$
$$\langle \Omega_3, X \rangle = p_3 ,$$

wobei $\langle\ ,\ \rangle$ das innere Produkt zweier Vektoren bedeutet. Geometrisch stellt dieses Gleichungssystem drei Gerade in der Ebene dar, die sich in einem Punkt, nämlich dem Lösungsvektor X, schneiden.

Man beginnt beim Iterations-Algorithmus mit einem beliebigen Punkt $X^o \in \mathbb{R}^2$ und bestimmt seine Projektion X^1 auf die 1.Gerade $\langle \Omega_1, X \rangle = p_1$:

$$X^1 = X^o + (X^1 - X^o), \text{ wobei } X^1 - X^o = \alpha\Omega_1 \text{ ist.}$$

$$\Rightarrow p_1 = \langle \Omega_1, X^1 \rangle = \langle \Omega_1, X^o \rangle + \alpha \langle \Omega_1, \Omega_1 \rangle.$$

$$\Rightarrow X^1 = X^o + \frac{p_1 - \langle \Omega_1, X^o \rangle}{\langle \Omega_1, \Omega_1 \rangle} \Omega_1$$

Mit Hilfe dieser Formel, die man leicht programmieren kann, hat man die Projektion des Punktes X^o auf die Gerade $\langle \Omega_1, X \rangle = p_1$ berechnet. Wir projizieren dann X^1 auf die 2.Gerade und erhalten den Punkt X^2, dann X^2 auf die 3.Gerade und erhalten den Punkt X^3, dann X^3 auf die 1.Gerade und erhalten den Punkt X^4, u.s.w.

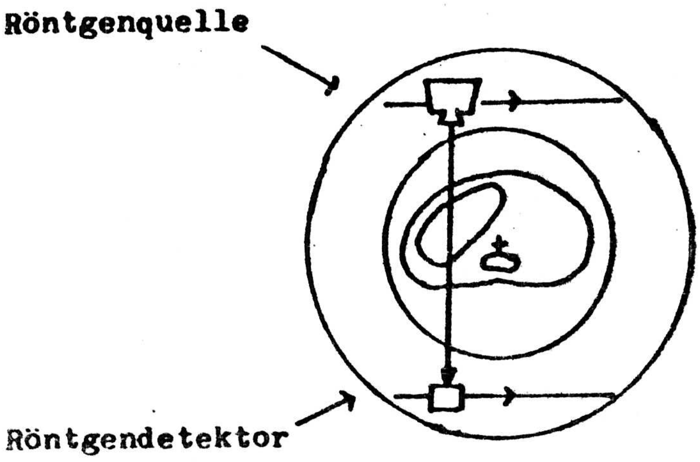
$$\begin{matrix} \langle \Omega_1, X^1 \rangle = p_1 & & \langle \Omega_1, X^2 \rangle \neq p_1 & & \langle \Omega_1, X^3 \rangle \neq p_1 & \\ \langle \Omega_2, X^1 \rangle \neq p_2 & \rightarrow & \langle \Omega_2, X^2 \rangle = p_2 & \rightarrow & \langle \Omega_2, X^3 \rangle \neq p_2 & \rightarrow \\ \langle \Omega_3, X^1 \rangle \neq p_3 & & \langle \Omega_3, X^3 \rangle \neq p_3 & & \langle \Omega_3, X^3 \rangle = p_3 & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & \langle \Omega_1, X^4 \rangle = p_1 & & \\ \rightarrow & \langle \Omega_2, X^4 \rangle \neq p_2 & \rightarrow & \text{u.s.w.} \\ & \langle \Omega_3, X^4 \rangle \neq p_3 & & \end{matrix}$$

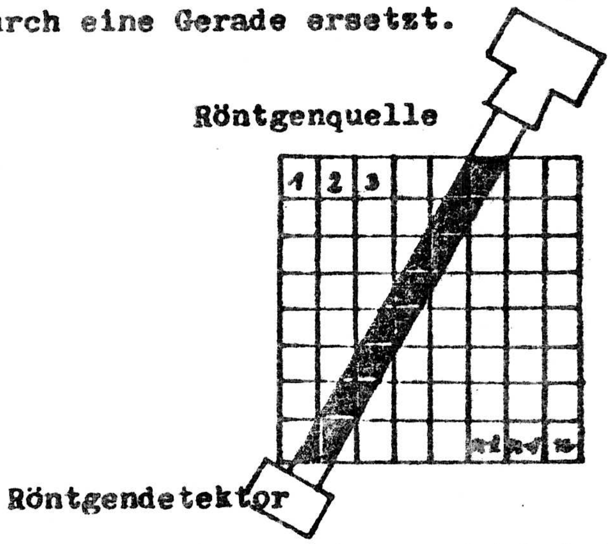
Man kann sich überlegen, daß dieses Verfahren konvergiert, und zwar zum Schnittpunkt der drei Geraden. Man kann sich auch überlegen, daß die Konvergenz gut ist, wenn die Geraden möglichst senkrecht aufeinander stehen. Dies ist in der Computer-Tomographie tatsächlich der Fall, weil jede Zeile von Ω nur sehr wenige von Null verschiedene Matrixelemente hat, und man daraus erwarten darf, daß dies der Fall ist.

In der Computer-Tomographie wird dieses Verfahren tatsächlich verwendet, um aus den Meßwerten die Dichtefunktion zu berechnen. Man nennt dieses Verfahren "multiplikative algebraische Rekonstruktions-Technik", abgekürzt MART. In der Numerischen Mathematik ist es als Methode von KACMARZ bekannt. Man kann dieses Verfahren auf alle Fälle auf eine Matrixgleichung der Form $\Omega X = P$ anwenden, gleichgültig, ob $m \geq n$ ist oder nicht, ob $P \in$ im Ω ist oder nicht, d.h. in Fällen, wo es eventuell keine Lösung gibt, oder sie nicht eindeutig ist. Stellen wir uns vor, daß die drei Geraden sich nicht in einem Punkt schneiden, sondern ein kleines Dreieck bilden. Dann hat die Gleichung $\Omega X = P$ keine Lösung. Wenn man MART anwendet, erhält man eine Folge $(X^i)_{i=1}^{\infty}$, die zwar nicht konvergiert, aber von einem bestimmten Index an im Dreieck bleiben wird. So ein Fall wird eintreten, wenn die Messung P nicht aus im Ω ist, sondern wegen der Meßfehler nur mehr mehr oder weniger in der Nähe von im Ω liegt.

3. In der Computer-Tomographie wird die Dichtefunktion eines ebenen Schnittes durch den Körper des Patienten nach Messungen und Rechnungen auf einem Bildschirm dargestellt (τομος - griechisch -Schnitt). Die Körperachse des Patienten ist horizontal. In einer Normalebene dazu befindet sich die sogenannte Röntgeneinheit, die, von außen besehen, die Form eines Torus hat.



Das miteinander starr verbundene System von Röntgenröhre und Röntgendetektor kann durch Translation auf Schienen und durch Rotation des ganzen Kreisringes bewegt werden. Auf diese Weise kann man den Röntgenstrahl entlang aller möglichen Geraden des $\mathbb{R}^2$ richten. Den ebenen Schnitt überzieht man mit einem Netz von etwa $n = 100 \times 100 = 10.000$ Maschenpunkten, die man in der Computer-Tomographie "pixels", d.h. picture elements, nennt. Der Röntgenstrahl wird im Modell durch einen schmalen Streifen im $\mathbb{R}^2$, und nicht durch eine Gerade ersetzt.



Die Matrix Ω besteht aus den Gewichtsfunktionen für die Strahlen k in den Zellen i.

Man hat algebraische Rekonstruktions-Techniken bis etwa zum Jahre 1970 in der Computer-Tomographie verwendet. Seither verwendet man ausschließlich die inverse Radon-Transformationsformel. Johann Radon war Professor im Institut für Mathematik, Universität

Wien, von 1947 bis zu seinem Tode im Jahre 1956. Was jetzt als Radon-Transformation bezeichnet wird, wurde von ihm in einer Arbeit aus dem Jahre 1917 behandelt und etwa 1960 für die Computer-Tomographie wiederentdeckt. Algebraische Rekonstruktions-Techniken haben den Nachteil, daß man erst nach Abschluß aller Messungen, d.h. nach voller Information über die Matrix P, mit der Rechnung beginnen kann. Bei der Radon-Transformations-Technik kann man Teilrechnungen schon während der Messung durchführen, und damit die Zeit, die zwischen der letzten Messung entlang des Röntgenstrahles $k = m$ und dem Aufscheinen der Dichtefunktion nach der Rechnung auf dem Bildschirm vergeht, verkürzen. Zum Abschluß sei aber darauf hingewiesen, daß MART bei Computer-Tomographie, angewendet auf die Materialprüfung zur Feststellung von Löchern in Gußstücken, nicht durch die Radon-Transformations-Technik zu ersetzen ist, weil man die Radon-Transformations-Technik gut nur bei glatter Dichtefunktion anwenden kann, was bei Gewebeschnitten durchaus zutrifft.

Literatur:

Radon J., (1917), Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, Ber.Verk.Sächs.Akad.69

Smith, K.T., Solmon, D.C., Wagner, S.L. (1977), Practical and Mathematical Aspects of the Problem of Reconstructing Objects from Radiographs, Bulletin AMS, 83, 1227-1270.

Univ.Prof.Dr.Johann Hejtmanek
Institut für Mathematik, Universität Wien
1090 Wien, Boltzmanngasse 9